3. Nacionalna konferencija sa međunarodnim učešćem
Fakultet tehničkih nauka u Čačku, 25-27. Septembar 2015.

3rd National Conference With International Participation
Faculty of Technical Sciences in Čačak, 25-27. September 2015.

UDK: 004.928SCIENTIFIC WORKPLACE Stručni rad

METOD ANIMACIJE ZA ANALIZU NEPREKIDNOSTI FUNKCIJE U PROGRAMSKOM PAKETU SCIENTIFIC WORKPLACE

METHOD OF ANIMATION FOR ANALYSIS OF CONTINUITY OF THE FUNCTION IN THE SOFTWARE PACKAGE SCIENTIFIC WORKPLACE

Duška Pešić, Aleksandar Pešić[2]
[1]*Visoka škola strukovnih studija za informacione tehnologije, Novi Beograd*
[2]*Fakultet za poslovno industrijski menadžment, Union Univerzitet, Beograd*
[1]duska.pesic@its.edu.rs, [2]andpesic@gmail.com

Apstrakt: *Korišćenje računara u nastavi matematike je posebno korisno prilikom obrade kompleksnih nastavnih tema kao što je pojam neprekidnosti funkcije. Pored toga što vizuelna prezentacija pruža neophodan uvod u prihvatanje pojma neprekidnosti funkcije, prikazivanjem velikog broja ilustracija i pravljenjem animacija omogućava se, takođe, pravilno razumevanje i trajno usvajanje ovog složenog matematičkog pojma. U tom smislu, u radu je predložen algoritam za izradu animacije u programskom paketu Scientific WorkPlace, koji pomaže pri analizi neprekidnosti određene funkcije u tački. Na ovaj način se pokazuje kako promena vrednosti parametra ε iz "ε- δ definicije neprekidne funkcije" izaziva promenu vrednosti parametra δ.*
Ključne reči: *Neprekidnost funkcije, animacija, Scientific WorkPlace.*

Abstract: *The use of computers in teaching mathematics is particularly useful when processing complex teaching topics such as the notion of continuity of functions. Visual presentation provides a necessary introduction to the acceptance of the notion of continuity of functions, but it also enables correct understanding and permanent adoption of this complex mathematical concept by creating animations and showing a large number of illustrations. Accordingly, this paper suggests an algorithm for creating animation in software package Scientific Workplace which helps in analyzing the continuity of certain functions at the point. In this way we can show how a change in the parameter value ε from"ε- δ definition of continuity of the function" causes a change in the value of the parameter δ.*
Key words: *Continuity of the function, Animation, Scientific WorkPlace.*

1. UVOD

Neprekidnost funkcije je jedan od najtežih pojmova matematičke analize. Zbog toga je veoma važno pronaći odgovarajući metod uvođenja i obrade pojma neprekidnosti, da bi

se sprečili spoznajni konflikti koji bi mogli predstavljati smetnju za dalji rad i prelazak na druge pojmove više matematike [2].

Kako se sa vizuelizacijom matematičkih pojmova razvija već postojeći koncept slike [3], u radu se predlaže korišćenje vizuelnog pristupa za predstavljanje koncepta neprekidnosti u nastavi matematike.

Za izradu potrebnih ilustracija i pravljenje animacija, koje su korisne za pravilno razumevanje i trajno usvajanje pojma neprekidnosti [4], koristi se programski paket Scientific WorkPlace. Ovaj softverski paket koji uključuje algebarski sistem je izabran jer omogućava jednostavan i lako razumljiv način kreiranja matematičkog teksta, odnosno efikasno obavljanje numeričkih i grafičkih operacija.

U cilju adekvatnog predstavljanja pripreme animacije za analizu neprekidnosti funkcije u programskom paketu Scientific WorkPlace, detaljno se opisuje algoritam pravljenja animacija za bijektivnu neprekidnu funkciju, algoritam pravljenja animacija neprekidne funkcije u ekstremnim vrednostima i algoritam pravljenja animacije za funkciju u tački prekida.

2. PRIPREMA ANIMACIJE

Na početku je potrebno svaki put kada se unosi neki pojam (funkcije, brojevi, konstante, tekst...) iz Toolbar-a odabrati jednu od ikona:

- za unos matematičkih simbola koji se na ekranu pokazuju u crvenoj boji,

- za unos teksta koji se prikazuje u crnoj boji.

2.1 ALGORITAM PRAVLJENJA ANIMACIJA ZA BIJEKTIVNU NEPREKIDNU FUNKCIJU

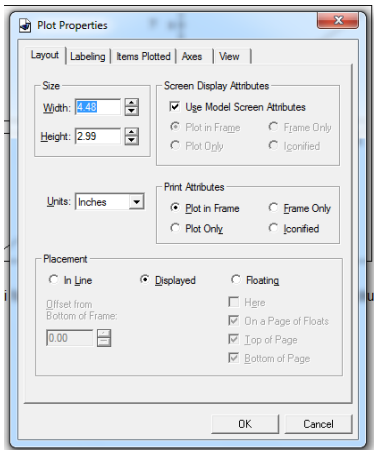
1. Uneti funkciju $f(x)$ koja se ispituje. Neka je to funkcija $f(x) = 2x - 1$.
2. Uneti x koordinatu tačke u kojoj se ispituje neprekidnost. Neka je to tačka $a = 1$.
3. Uneti inverznu funkciju date funkcije $F(x) = f^{-1}(x)$ (mora se precizno definisati):

   $F(x) = \dfrac{x-1}{2}$.
4. Uneti proizvoljan niz raznih vrednosti za ε u funkciji indeksa i (promenom vrednosti broja i menjaće se i vrednosti broja ε). Kada se jednom definiše, ovaj niz se ne mora menjati kada se menja funkcija ili tačka u kojoj se ispituje neprekidnost. Neka je npr: $\varepsilon(i) = \dfrac{2}{i}$.
5. Definisati δ koje će zavisiti od ε (a samim tim i od i). Ovaj izraz ne menjati pri promeni funkcije, kao ni pri promeni tačke u kojoj se ispituje neprekidnost: $\delta(i) = \min\left\{\left|a - F\left(f(a) + \varepsilon(i)\right)\right|, \left|a - F\left(f(a) - \varepsilon(i)\right)\right|\right\}$.

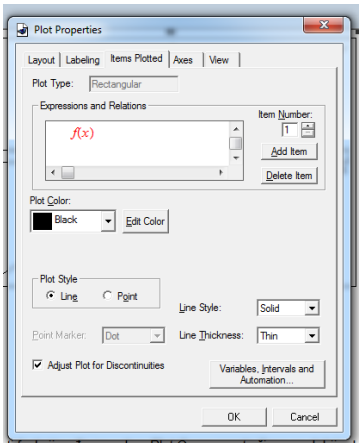
Sledeći postupak brisanja svih prethodnih definicija je isti u svim slučajevima. Iz menija odabrati: Compute/ Definition/ Clear definition.
Nakon toga namestiti kursor na kraj svake od funkcija i parametara $f(x)$, $F(x)$, $\varepsilon(i)$ i $\delta(i)$ - i pritisnuti ikonicu: , ili redom ponoviti sledeći postupak: Compute/ Definitions/ New Definition.

Pripremiti niz grafika koji posle mogu da služe za prezentacije raznih funkcija jednostavnim predefinisanjem posmatranih elemenata. Grafički prikazi se dobijaju kada se prvo ukuca $f(x)$ i nakon toga iz glavnog menija pritisne dugme: . Drugi način da se to uradi je pomoću sledećih naredbi: Compute/ Plot 2D/ Rectangular.

Za dalji rad i dodavanje novih elemenata na grafiku pritisne se u donji desni ćošak slike. Time se dobija meni sa slike 1. Da bi se dodale prave i tačke potrebne za analizu neprekidnosti funkcije uđe se u deo: Item Ploted čime se dobija drugi meni (slika 2).



Slika 1. Meni za rad sa graficima



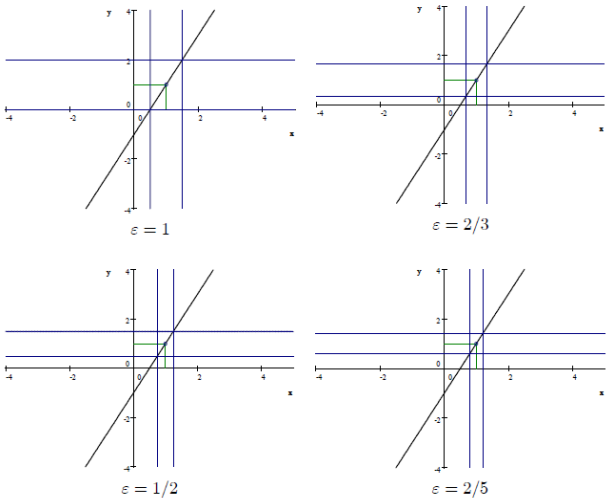
Slika 2. Dodavanje novih elemenata grafika

Uz pomoć naredbe Add Item se mogu dodati željeni elementi. U ovom slučaju dodaju se sledeći elementi:

1. $(a,0,a,f(a))$ vertikalna linija koja spaja tačke $(a,0)$ i $(a,f(a))$;
2. $(0,f(a),a,f(a))$ horizontalna linija koja spaja tačke $(0,f(a))$ i $(a,f(a))$;
3. $f(a)-\varepsilon(1)$ horizontalna linija koja prolazi kroz tačku $f(a)-\varepsilon(1)$ na y-osi, paralelno sa x-osom;
4. $f(a)+\varepsilon(1)$ horizontalna linija koja prolazi kroz tačku $f(a)+\varepsilon(1)$ na y-osi, paralelno sa x-osom;

5. $\left(a-\delta(1),-100,a-\delta(1),100\right)$ vertikalna linija koja prolazi kroz tačku $a-\delta$ na x-osi, paralelno sa y-osom (broj 100 je odabran tako da bude dovoljno velik da se ne vidi na crtežu - može se uzeti i bilo koji dovoljno veliki broj);
6. $\left(a+\delta(1),-100,a+\delta(1),100\right)$ vertikalna linija plava vertikalna linija koja prolazi kroz tačku $a+\delta$ na x-osi, paralelno sa y-osom;
7. $\left(a,\ f\left(a\right)\right)$ tačka u kojoj se ispituje neprekidnost.

U istom meniju se takođe bira željena vrsta, boja i debljina linije ili tačke u delu menija Plot Style, kao i koji deo domena se želi videti. Opisani postupak se ponovi željeni broj puta (onoliko koliko se slika želi napraviti i prikazati), menjajući vrednosti nezavisne promenljive u funkcijama ε i δ, tj. za $\varepsilon(2)$ i $\delta(2)$, $\varepsilon(3)$ i $\delta(3)$ itd. Tim postupkom se dobija niz slika, kod kojih se ε i δ neznatno razlikuju sa slike na sliku. Posle toga ući u svaku sliku pritiskom miša na desni donji kraj slike i odabrati OK dugme (ukoliko postoji deo grafika funkcije koji pripada vertikalnoj traci a ne pripada i horizontalnoj, tj. ukoliko postoji deo grafika funkcije koji se nalazi izvan dobijenog pravougaonika a pripada vertikalnoj traci između dve vertikalne linije, na bilo kojoj od slika, tada funkcija nije neprekidna u toj tački).



Slika 3. Niz slika za animaciju i ispitivanje neprekidnosti funkcije *f*(*x*)

Ukoliko se želi promeniti funkcija koja se ispituje, ponovi se ceo postupak predefinisanja, tj. unosi se nova funkcija $f\left(x\right)$ kao i nove vrednosti za a i $f^{-1}\left(x\right)$, nakon čega se ponovo uđe u svaku od pripremljenih slika i samo se pritisne dugme OK. Tako se automatski dobija čitav niz novih grafika funkcija, sa željenim parametrima. Prikazivanjem jedne po jedne slike, željenom brzinom (View 150%), dobija se utisak animacije pokreta prava, čime se pojasni učenicima kako promena ε izaziva promenu δ. Zaključak koji se izvodi analizom dobijenih slika je sledeći: Ukoliko postoji deo

grafika funkcije koji pripada vertikalnoj traci a ne pripada i horizontalnoj, tj. ukoliko postoji deo grafika funkcije koji se nalazi izvan dobijenog pravougaonika a pripada vertikalnoj traci između dve vertikalne linije, na bilo kojoj od slika, tada funkcija nije neprekidna u toj tački.

2.2. ALGORITAM PRAVLJENJA ANIMACIJA NEPREKIDNE FUNKCIJE U EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

1. Uneti funkciju $g(x)$: $g(x) = x^2$.
2. Uneti x koordinatu tačke u kojoj se ispituje neprekidnost: $b = 0$.
3. Uneti desnu (ukoliko je moguće maksimalnu) granicu intervala (b, e_1) u kome je funkcija bijektivna: $e_1 = 10$.
4. Uneti levu granicu intervala (ukoliko je moguće maksimalnu) (e_2, b) u kome je funkcija bijektivna: $e_2 = -10$
5. Uneti inverznu funkciju funkcije $g(x)$, x iz intervala (b, e_1) sa desne strane tačke u kojoj se ispituje neprekidnost funkcije $g(x)$ (mora se precizno definisati): $g_1(x) = \sqrt{x}$.
6. Uneti inverznu funkciju funkcije $g(x)$, x iz intervala (e_2, b) sa leve strane tačke u kojoj se ispituje neprekidnost funkcije $g(x)$: $g_2(x) = \sqrt{-x}$
7. Sledeće funkcije se napišu jednom, i ne menjaju se pri promeni funkcije ili tačke u kojoj se ispituje neprekidnost:

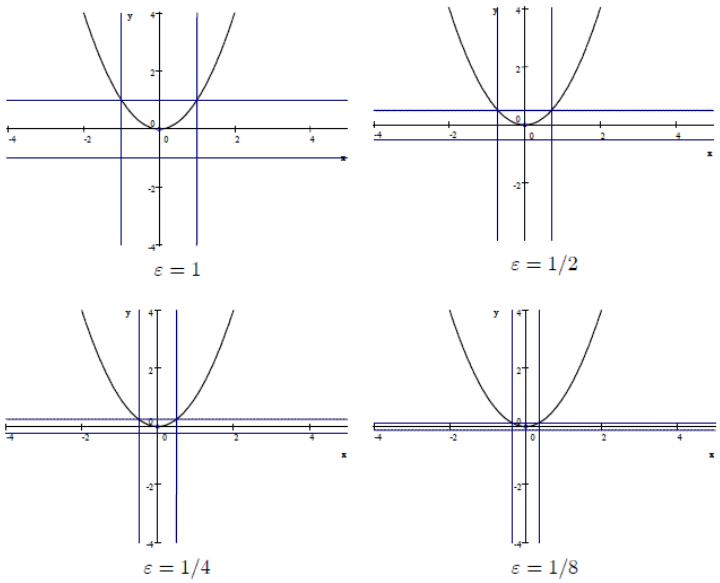
$$G_1(x) = \begin{cases} g_1(x) & za \quad g(b) < x < g(e_1) \\ 10^{10} & za \quad x \geq g(e_1) \\ 10^{10} & za \quad x \leq g(b) \end{cases} \qquad G_2(x) = \begin{cases} g_2(x) & za \quad g(e_2) < x < g(b) \\ 10^{10} & za \quad x \geq g(b) \\ 10^{10} & za \quad x \leq g(e_2) \end{cases}$$

*Umesto broja 10^{10} se može staviti bilo koji dovoljno veliki broj koji se neće uočavati na dobijenim slikama.

6. Uneti proizvoljan niz raznih vrednosti za ε u funkciji indeksa i (promenom vrednosti broja i menjaće se i vrednosti broja ε). Kada se jednom definiše, ovaj niz se ne mora menjati kada se menja funkcija ili tačka u kojoj se ispituje neprekidnost. Neka je npr: $\varepsilon_1(i) = \frac{4}{2^i}$.
7. Definisati δ koje će zavisiti od ε (a samim tim i od i). Ovaj izraz ne menjati pri promeni funkcije, kao ni pri promeni tačke u kojoj se ispituje neprekidnost:

$$\delta_1(i) = \min \begin{Bmatrix} \left|b - G_1\left(g(b) + \varepsilon_1(i)\right)\right|, \left|b - G_2\left(g(b) + \varepsilon_1(i)\right)\right|, \\ \left|b - G_2\left(g(b) - \varepsilon_1(i)\right)\right|, \left|b - G_1\left(g(b) + \varepsilon_1(i)\right)\right| \end{Bmatrix}.$$

Ponoviti postupak predefinisanja iz predhodnog primera. Nakon toga namestiti kursor na kraj svake od funkcija i na opisani način definisati unešene vrednosti: $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, b, e_1, e_2, $G_1(x)$, $G_2(x)$, $\varepsilon_1(i)$ i $\delta_1(i)$. Pripremiti niz crteža kao u predhodnom primeru.



Slika 4. Niz slika za animaciju i ispitivanje neprekidnosti funkcije *g*(*x*)

2.3. ALGORITAM PRAVLJENJA ANIMACIJE ZA FUNKCIJU U TAČKI PREKIDA

1. Uneti funkciju $h(x)$: $h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & za \quad x \le 1 \\ 2x & za \quad x > 1 \end{cases}$.
2. Uneti x koordinatu tačke u kojoj se ispituje neprekidnost: $c = 1$.
3. Uneti desnu (ukoliko je moguće maksimalnu) granicu intervala (c, l_1) u kome je funkcija bijektivna: $l_1 = 10$.
4. Uneti levu granicu intervala (ukoliko je moguće maksimalnu) (l_2, c) u kome je funkcija bijektivna: $l_2 = -10$

5. Uneti inverznu funkciju funkcije $h(x)$, x iz intervala (c, l_1) sa desne strane tačke u kojoj se ispituje neprekidnost funkcije $h(x)$ (mora se precizno definisati): $h_1(x) = \frac{x}{2}$.
6. Uneti inverznu funkciju funkcije $h(x)$, x iz intervala (l_2, c) sa leve strane tačke u kojoj se ispituje neprekidnost funkcije $h(x)$: $h_2(x) = \frac{x+1}{2}$
7. Sledeće funkcije se napišu jednom, i ne menjaju se pri promeni funkcije ili tačke u kojoj se ispituje neprekidnost.

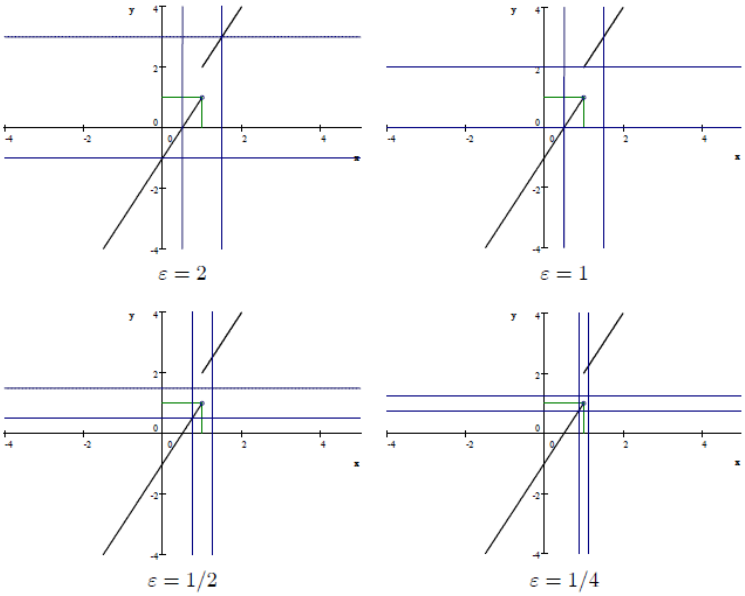
$$H_1(x) = \begin{cases} h_1(x) & za \quad h(c+10^{-10}) < x < h(l_1) \\ 10^{10} & za \quad x \geq h(l_1) \\ 10^{10} & za \quad x \leq h(c+10^{-10}) \end{cases} \qquad H_2(x) = \begin{cases} h_2(x) & za \quad h(l_2) < x < h(c-10^{-10}) \\ 10^{10} & za \quad x \geq g(c-10^{-10}) \\ 10^{10} & za \quad x \leq h(l_2) \end{cases}$$

*Umesto brojeva 10^{10} i 10^{-10} se mogu staviti bilo koji dovoljno veliki i dovoljno mali broj koji se neće uočavati na dobijenim slikama.

8. Uneti proizvoljan niz raznih vrednosti za ε u funkciji indeksa i (promenom vrednosti broja i menjaće se i vrednosti broja ε). Kada se jednom definiše, ovaj niz se ne mora menjati kada se menja funkcija ili tačka u kojoj se ispituje neprekidnost. Neka je npr: $\varepsilon_2(i) = \frac{4}{2^i}$.
9. Definisati δ koje će zavisiti od ε (a samim tim i od i). Ovaj izraz ne menjati pri promeni funkcije, kao ni pri promeni tačke u kojoj se ispituje neprekidnost:

$$\delta_2(i) = \min \begin{Bmatrix} |c - H_1(h(c) + \varepsilon_2(i))|, |c - H_2(h(c) - \varepsilon_2(i))|, \\ |c - H_2(h(c) + \varepsilon_2(i))|, |b - H_1(h(c) + \varepsilon_2(i))| \end{Bmatrix}.$$

Ponoviti postupak predefinisanja iz predhodnih primera: $h(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, c, l_1, l_2, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $\varepsilon_2(i)$. Pripremiti niz crteža kao u prethodnom primeru.



Slika 5. Niz slika za animaciju i ispitivanje neprekidnosti funkcije $h(x)$

3. ZAKLJUČAK

S obzirom na to da prihvatanje formalnog pojma neprekidnosti od strane učenika često izaziva poteškoće, uvođenjem inovativnih metoda zasnovanih na vizuelnom pristupu povećava se razumljivost i efikasnost nastavnog procesa.

U ovom radu je, objašnjavanjem načina izrade animacije na primerima dve neprekidne funkcije i jedne funkcije koja ima prekid u tački, omogućeno iskorišćavanje svih prednosti vizuelnog pristupa ovoj složenoj nastavnoj temi.

Specifičnije, putem korišćenja algoritma za izradu animacije u matematičkom programskom paketu Scientific WorkPlace pokazano je kako promena vrednosti parametra ε iz "ε- δ definicije neprekidne funkcije" izaziva promenu vrednosti parametra δ.

Adekvatna vizuelna objašnjenja otklanjaju problem nedostatka jasne i konzistentne ideje o konceptu neprekidnosti i time umanjuju širok opseg grešaka i pogrešnog razumevanja koji potencijalno postoje u intuitivnom razmišljanju učenika o neprekidnosti funkcija. [5] Na ovaj način se, takođe, promoviše kreativnost i vizuelno razmišljanje u učionicama uz omogućavanje razvoja matematički sofisticiranih ideja o konceptu neprekidnosti.

LITERATURA

[1] Downs, J.M. (2002), *Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence*, Educational Studies in Mathematics, Vol.48, 259-288.

[2] Takači , Đ., Pešić, D., Tatar, J. (2006) *On the continuity of functions*, International Journal of Mathematical Education in Science and Tehnology, Vol 37, No 7, 2006, pp. 783-791.

[3] Takači Đ., Pešić D., Tatar J. (2003) *An Introduction to the Continuity of functions using Scientific Workplace*, The Teaching of Mathematics, Vol VI, 2, Belgrade, pp. 105-112.

[4] Tall D., Vinner A., (1981) *Concept Image and Concept Definitionin Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, Education Studies in Mathematics, 12, pp. 159-169.

[5] Tall, D., (1991) *Recent Developements in the Use of Computer to Visualize and Symbolize Calculus Concepts*, The Laboratory Approach to Teaching Calculus, M.A.A. Notes Vol.20, pp. 15-25.

[6] Tall D., (1991) *Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann&Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, pp. 105-119.